La formula di Weiss

Per ogni $u \in H^1(B_r(x_0))$ definiamo il funzionale

$$W(u, r, x_0) := \frac{1}{r^d} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{r^{d+1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Data una funzione $u \in B_r(x_0)$, possiamo definire

$$u_{r,x_0} \in H^1(B_1) \ , \quad u_{r,x_0}(x) = \frac{1}{r} u(x_0 + rx) \, .$$

Quando $x_0 = 0$, scriveremo semplicemente

$$u_r(x) := u_{r,0}(x) = \frac{1}{r} u(rx).$$

Osserviamo che si ha la relazione

$$\big(u_{r,x_0}\big)_s = u_{sr,x_0}.$$

Osserviamo che vale l'identità

$$W(u, r, x_0) = W(u_{r,x_0}, 1, 0).$$

Scriveremo semplicemente

$$W(v) := W(v, 1, 0) \quad \text{per ogni funzione} \quad v \in B_1.$$

Lemma 1 (Formula di Weiss)**.** *Siano $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in C^\infty(B_R(x_0))$. Allora*

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_{x_0,r}) = \frac{d}{r}\big(W(z_{x_0,r}) - W(u_{x_0,r})\big) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_{x_0,r} - u_{x_0,r}|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1},$$

dove $z_{x_0,r} : B_1 \to \mathbb{R}$ è l'estensione 1-omogenea di $u_{x_0,r}$ in B_1, ovvero

$$z_{x_0,r}(x) := |x| \, u_{x_0,r}\left({}^{x}\!/\!{}_{|x|}\right) .$$

Proof. Supponiamo che $x_0 = 0$. Dato $r \in (0, R)$, useremo la notazione

$$u_r(x) = \frac{1}{r} u(xr).$$

Osserviamo che la funzione $r \mapsto \displaystyle\int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx$ è differenziabile e che si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx \right) &= -\frac{d}{r^{d+1}} \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{r^d} \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= -\frac{d}{r^{d+1}} \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |\nabla u_r|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Per quanto riguarda il termine di bordo, prima calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} u^2(x) \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial B_1} u(ry)^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \\ &= 2 \int_{\partial B_1} u(ry) \, y \cdot \nabla u(ry) \, d\mathcal{H}^{d-1}(y) \\ &= 2r \int_{\partial B_1} u_r \, (x \cdot \nabla u_r) \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \end{aligned}$$

e quindi abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{d+1}} \int_{\partial B_r} u^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \right) = -\frac{2}{r^{d+2}} \int_{\partial B_r} u^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} + \frac{2}{r} \int_{\partial B_1} u_r \, (x \cdot \nabla u_r) \, d\mathcal{H}^{d-1}. \tag{2}$$

Consideriamo ora l'estensione omogenea

$$z_r : B_1 \to \mathbb{R}$$

della funzione

$$u_r : \partial B_1 \to \mathbb{R}.$$

Possiamo scrivere z_r on coordinate polari come $\rho \in (0,1]$, $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ come

$$z_r(\rho,\theta) = \rho\, z_r(1,\theta).$$

Abbiamo quinfdi

$$\begin{aligned} W(z_r) &= \int_{B_1} |\nabla z_r|^2\,dx - \int_{\partial B_1} z_r^2\,d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_0^1 r^{d-1}\,dr \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(z_r^2(1,\theta) + |\nabla_\theta z_r|^2\right)\,d\theta - \int_{\mathbb{S}^{d-1}} z_r^2(1,\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\nabla_\theta z_r|^2\,d\theta - \frac{d-1}{d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} z_r^2(1,\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{d}\int_{\partial B_1} \left(|\nabla u_r|^2 - (x\cdot\nabla u_r)^2\right)\,d\mathcal{H}^{d-1} - \frac{d-1}{d}\int_{\partial B_1} u_r^2\,d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Mettendo insieme (1), (2) e (3), otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_r) = \frac{d}{r}\big(W(z_r) - W(u_r)\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}.$$

□

Teorema 2 (Formula di Weiss)**.** *Siano $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R(x_0))$. Allora, la funzione*

$$r \mapsto W(u_{r,x_0})$$

è assolutamente continua su ogni intervallo $[s,S] \subset (0,R)$ e si ha

$$W(u_{x_0,S}) - W(u_{x_0,s}) = \int_s^S \left(\frac{d}{r}\big(W(z_{x_0,r}) - W(u_{x_0,r})\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_{x_0,r} - u_{x_0,r}|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}\right)\,dr,$$

dove $z_{x_0,r} : B_1 \to \mathbb{R}$ è l'estensione 1-omogenea di $u_{x_0,r}$ in B_1, ovvero

$$z_{x_0,r}(x) := |x|\,u_{x_0,r}\left({}^{x}\!/\!_{|x|}\right).$$